

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A/Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences et des Sciences de l'Ingénieur
Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle

EXPOSÉ

En
Statistiques

Thème
Les plans d'expériences

Proposé par :
M^r S. ADJABI

Présenté par :
M^r RABTA Boualem
M^{elle} BARECHE Aicha

Première année post graduation 2000/2001

Béjaïa, Septembre 2001.

Contents

Introduction	iii
1 La méthode des plans d'expériences	3
1.1 Définitions	3
1.1.1 Facteur et niveau	3
1.1.2 Objet (essai)	3
1.1.3 Interaction	4
1.1.4 Expérience	4
1.1.5 Unité expérimentale	4
1.1.6 Plan d'expériences	4
1.2 Les classes des plans d'expériences	4
1.2.1 Plans non stratifiés	5
1.2.2 Plans stratifiés	5
1.2.3 Plans hybrides	5
1.3 Méthodologie des plans d'expériences	5
2 Les plans optimaux	8
2.1 Orthogonalité	9
2.1.1 Orthogonalité de deux actions (facteurs ou interactions) :	9
2.1.2 Orthogonalité d'un plan d'expériences :	10
2.1.3 Matrice orthogonale	11
2.2 Critère "Matrice d'Hadamard"	12

2.2.1	Construction de la matrice d'Hadamard	12
2.3	Critère de la diagonale de $(X^t X)^{-1}$	13
2.4	L —optimalité	14
2.5	A —optimalité	14
2.6	c —optimalité	14
2.7	D —optimalité et D_s —optimalité	14
2.8	Classement des plans	15
3	Les plans non stratifiés - La régression	16
3.1	Exposé du problème	16
3.2	Estimation des α_i	17
3.3	Estimation de σ^2	19
3.4	Loi des $\hat{\alpha}_i$	19
3.5	Tests sur les coefficients du modèle	19
3.5.1	Test simultané de tous les coefficients de régression	19
3.5.2	Test du caractère significatif d'un des coefficients de régression . . .	20
3.5.3	Test de q coefficients de régression	20
4	Les plans orthogonaux	21
4.1	Les plans factoriels	21
4.1.1	Les plans factoriels sans répétition	21
4.1.2	Les plans factoriels avec répétition	22
4.1.3	Les plans factoriels complets	22
4.1.4	Les plans factoriels fractionnés	22
4.2	Les plans multifactoriels	25
4.2.1	Les plans gréco-latins	26
4.2.2	Les carrés latins	27
4.2.3	Utilisation des plans multifactoriels, gréco-latins et latins	27
4.3	Les plans rectangulaires	28

4.4	Les plans mixtes	29
4.4.1	Les plans mixtes simples	29
4.4.2	Les plans mixtes complexes	29
4.4.3	Les plans mixtes à composants liés	29
4.5	L'analyse des plans orthogonaux	30
4.5.1	Analyse graphique	30
4.5.2	Analyse de la variance	32
4.5.3	ANOVA à deux facteurs	32
4.6	Exemple	36
5	L'approche Bayesienne	41
5.1	Introduction	41
5.2	Plans Bayesiens Optimaux	41
5.3	Le choix des fonctions d'utilité	43
5.3.1	L'information de Shannon	43
5.3.2	La perte quadratique	44
5.4	La distribution à priori	44
5.5	Les calculs	45

Introduction

Depuis bien longtemps, l'observation et l'expérimentation sont deux outils essentiels de l'avancement des sciences.

L'observation permet d'acquérir une première connaissance des phénomènes de la nature, au sens le plus large, et d'en déduire des hypothèses, qui doivent ensuite être vérifiées et, éventuellement précisées ou amendées.

Dans certaines disciplines, telles la médecine, l'économie, la météorologie et les sciences de la terre, il n'est pas ou il n'est guère possible de provoquer la réalisation des phénomènes que l'on désire étudier. La vérification des hypothèses émises ne peut alors se faire que par une observation étendue, dans le temps ou dans l'espace sous forme d'enquête.

Dans d'autres disciplines où, au contraire, les phénomènes étudiés peuvent être provoqués assez facilement, telles la biologie, la physique et la chimie, le contrôle des hypothèses se fera habituellement par l'expérience ou l'expérimentation.

L'expérimentation est un des moyens privilégiés d'acquérir ou d'améliorer ses connaissances. Mais l'expérimentation, elle même, doit être optimisée car son objectif est d'obtenir les informations les plus fiables possibles en un minimum d'essais.

La réalisation de cet objectif suppose l'emploi de méthodes appropriées. Ces méthodes existent depuis une cinquantaine d'années. Leur efficacité a été mathématiquement démontrée.

La démarche expérimentale classique "variation du niveau d'un seul facteur à la fois", en plus d'être longue et coûteuse, ne permet pas toujours une approche sûre, fine et rentable du phénomène étudié.

La méthode des Plans d'Expériences "plusieurs facteurs à des niveaux différents à la fois

pour chaque essai selon une procédure programmée” permet :

- Une diminution notable du nombre d’essais.
- Une possibilité d’augmenter le nombre de facteurs étudiés ou leurs niveaux.
- Une prise en compte d’éventuelles interactions entre facteurs.
- Une recherche de la réponse optimale.
- Une modélisation simple des résultats.
- Une bonne précision dans la détermination des résultats.

Cette méthode intègre un outil mathématique statistique qui prendra en compte la variabilité naturelle du phénomène.

Il est important de retenir que le modèle expérimental du phénomène étudié n’est valide que dans les domaines des variations choisies des facteurs contrôlés. Sans vérification préalable, l’extrapolation est dangereuse.

Chapter 1

La méthode des plans d'expériences

1.1 Définitions

1.1.1 Facteur et niveau

Nous appellerons facteur toute série d'éléments de même nature qui peuvent être comparés au cours d'une expérience, telle qu'une série de variétés, un ensemble de produits phytosanitaires, différentes doses d'un même engrais, différentes températures, différentes pressions, etc... Ces facteurs peuvent être divisés en facteurs qualitatifs, caractérisés par des éléments qui ne peuvent pas être classés à priori (variétés, produits phytosanitaires, etc...), et en facteurs quantitatifs, dont les éléments se classent au contraire de façon logique à priori (différentes doses d'un même engrais, différentes températures, différentes pressions, etc...).

Les différents éléments individuels dont il vient d'être question seront aussi appelés variantes ou niveaux, le terme variante convenant mieux dans le cas des facteurs qualitatifs et le terme niveau dans le cas des facteurs quantitatifs.

1.1.2 Objet (essai)

nous appellerons "Objet" toute variante ou niveau d'un facteur unique, de même que toute combinaison de variantes ou de niveaux de deux ou plusieurs facteurs.

1.1.3 Interaction

On dit qu'il existe une interaction entre deux facteurs si la variation de l'un influe sur l'effet de l'autre. Cette interaction peut être double (entre deux facteurs), triple (entre trois facteurs),...

1.1.4 Expérience

Intervention volontaire dans un système pour observer ses effets sur un phénomène, dans le but de connaître un comportement du phénomène permettant d'établir ce que l'on peut appeler un modèle expérimental représentatif du phénomène.

1.1.5 Unité expérimentale

L'unité expérimentale est l'unité de base de l'expérience, qui est traitée individuellement dès le départ, qui est l'objet d'au moins une observation et qui est également considérée individuellement au cours du dépouillement des résultats. Dans une expérience en champ, en verger et en forêt, cette unité sera le plus souvent une parcelle, constituée d'une certaine étendue de terrain ou d'un certain nombre de plantes.

1.1.6 Plan d'expériences

C'est une méthode d'organisation d'expériences permettant de n'effectuer que le strict minimum d'essais, de plus les résultats sont exploités plus efficacement que lors d'essais non ordonnés ou aléatoires.

Il peut être représenté par un tableau ou une matrice dont les lignes représentent les objets et les colonnes représentent les facteurs et les interactions.

Dans certains ouvrages, on parle plutôt de protocole expérimental.

1.2 Les classes des plans d'expériences

Nous distinguons trois classes essentielles des plans d'expériences :

1.2.1 Plans non stratifiés

Choisir (ou constater) presque au hasard les différentes valeurs des variables dans les domaines les plus intéressants. Ce sera, par exemple, le cas pour un phénomène soumis à des variables sur lesquelles aucune action n'est possible (conditions atmosphériques par exemple). Nous disons dans ce cas, que nous avons des variables non stratifiées et que le plan est non stratifié. Nous verrons qu'il est alors nécessaire de faire une hypothèse sur le type de loi qui régit le phénomène. On testera si l'explication ainsi donnée du phénomène a quelques chances d'être valable et on estimera les paramètres de la loi retenue.

1.2.2 Plans stratifiés

Choisir un certain nombre de valeurs discrètes pour chacune des variables explicatives considérées. L'expérimentation n'aura lieu que pour certaines combinaisons de ces valeurs ou éventuellement toutes. Les valeurs des variables explicatives sont dites niveaux de ces variables. Nous dirons que, dans ce cas, il n'est pas nécessaire de faire une hypothèse sur la loi régissant le phénomène. On testera l'hypothèse de l'action de telle ou telle variable et on estimera la valeur prise par le scalaire caractérisant le phénomène pour les différentes combinaisons des niveaux des variables explicatives.

1.2.3 Plans hybrides

En Combinant les deux possibilités précédentes, On dit que nous avons alors un plan d'expériences hybride.

1.3 Méthodologie des plans d'expériences

Les expériences que doit comporter un plan d'expériences dépendent :

- Des informations que nous souhaitons recueillir.
- Des exigences de l'expérimentation.

Les étapes chronologiques sont :

1. Formalisation du problème (Objectif) :

Cette étape consiste à recueillir un maximum d'informations concernant le phénomène étudié. On détermine l'objectif final, les contraintes de l'étude, l'optimisation à atteindre.

2. Choisir les facteurs, niveaux et interactions (Modèle de base) :

Il s'agit de définir les facteurs, leurs niveaux et les interactions retenues. L'expérience permet de sélectionner certains facteurs, de définir leurs niveaux de variation, d'en figer d'autres, de sélectionner certaines interactions susceptibles d'être influentes sur la réponse.

3. Construire le plan (Choix des affectations) :

Il s'agit de choisir le plan retenu qui peut être soit factoriel complet, soit factoriel fractionné (tables de Taguchi), et d'affecter les facteurs et interactions aux colonnes (graphe linéaire associé à la table).

4. Réaliser les essais du plan (Résultats) :

La réalisation des essais doit se faire dans des conditions optimales. Les facteurs variables sont bien aux niveaux préconisés, les facteurs figés restent stables, l'environnement de la campagne d'essais est contrôlé autant que possible, la réponse est donnée avec la plus grande précision, l'essai est, si possible, répété, les mesures sont réalisées par une unique personne compétente.

5. Analyser les résultats (effets, graphiques, variances) :

Le calcul des moyennes et des effets permettent de déterminer les coefficients du modèle matriciel. La représentation graphique et son analyse donnent une interprétation du poids des effets sur la réponse. L'analyse de la variance permet de vérifier si les effets définis comme influents pour l'étude associée sont réellement associés au facteur étudié ou s'il ne sont pas les résultats de la variabilité naturelle du phénomène étudié. Elle permet donc, une validation statistique des effets.

6. Optimiser la réponse (Modèle, conclusion) :

Il est retenu pour le modèle matriciel final, les effets influents et statistiquement

significatifs. Les coefficients retenus du modèle donnent l'extrimum recherché pour la réponse.

L'expérience permet ainsi l'élaboration d'un modèle représentatif du phénomène, l'estimation des quantités d'intérêt, la comparaison entre modèles concurrents ou de reprendre d'autres expériences avec plus d'information et de compréhension du phénomène.

Chapter 2

Les plans optimaux

Commençons ce chapitre par un exemples élémentaire (Pázman, 1986) illustrant l'intérêt que peut présenter une bonne planification de l'expérience.

Exemple :

Considérons trois objets O_1 , O_2 et O_3 dont les masses respectives m_1 , m_2 et m_3 sont à déterminer. Nous disposons pour cela d'une balance dont l'erreur de mesure ε est assimilée à une variable gaussienne $N(0, \sigma^2)$ venant s'ajouter à une erreur systématique m_0 de valeur inconnue. Nous pouvons effectuer quatre pesées.

La méthode qui vient immédiatement à l'esprit consiste à effectuer une première pesée à vide pour déterminer l'erreur systématique m_0 , puis à peser successivement chacun des trois objets. Soit y_0 le résultat de la première pesée, nous avons $y_0 = m_0 + \varepsilon_0$, puis pour les mesures suivantes $y_i = m_0 + m_i + \varepsilon_i$, pour $i = 1, 2, 3$. Les estimées des masses m_i au sens des moindres carrés sont alors $\hat{m}_i = y_i - y_0$, pour $i = 1, 2, 3$ et on montre que : $\mathbb{V}(\hat{m}_i) = 2\sigma^2$, et $cov(\hat{m}_i, \hat{m}_j) = \sigma^2$, pour $i \neq j$.

Considérons maintenant une autre alternative, comportant elle aussi quatre pesées. Elle ne diffère de la précédente que par le remplacement de la pesée à vide par une pesée simultanée des trois objets. Nous avons donc : $y_0 = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + \varepsilon_0$, les mesures suivantes sont inchangées. Les estimées des masses sont alors données par $\hat{m}_i = \frac{(y_0 + y_i - y_j - y_k)}{2}$, pour $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$, et $\mathbb{V}(\hat{m}_i) = \sigma^2$ et $cov(\hat{m}_i, \hat{m}_j) = 0$, pour $i \neq j$.

Par rapport à la méthode intuitive, cette deuxième méthode conduit donc à une estimation plus précise et à l'indépendance des estimées des masses des objets.

A	B
0	0
0	0
0	1
0	1
1	0
1	0
1	1
1	1
2	0
2	0
2	1
2	1

Table 2.1: Exemple d'un plan orthogonal.

On pourra améliorer davantage la précision des résultats par le choix judicieux d'un autre plan. Mais une question qui se pose : sur quelle base peut-on dire qu'un plan est meilleur qu'un autre ?. Nous allons maintenant, définir quelques critères d'optimalité des plans d'expériences.

2.1 Orthogonalité

2.1.1 Orthogonalité de deux actions (facteurs ou interactions) :

Deux actions sont orthogonales si, et seulement si, à chaque niveau de l'une, tous les niveaux de l'autre sont associés le même nombre de fois dans le plan d'expériences.

Exemple :

Soient le facteur A à 3 niveaux $(0, 1, 2)$ et le facteur B à 2 niveaux $(0, 1)$. Si leurs niveaux sont associés dans le plan expérimental comme il est représenté dans le tableau suivant, alors ils sont orthogonaux et : $A \perp B$. On peut parler d'orthogonalité avec le terme constant (ou "moyenne"). Le terme constant qui est une interaction d'ordre 0 a par définition un seul niveau.

Si A est orthogonal au terme constant, chacun de ses niveaux sera représenté le même nombre de fois dans le plan d'expériences. Dans l'exemple ci-contre : $A \perp m$ et $B \perp m$.

2.1.2 Orthogonalité d'un plan d'expériences :

Un plan d'expériences est dit orthogonal si, et seulement si, toutes les actions n'ayant pas un facteur en commun sont deux à deux orthogonales.

Un même plan peut être orthogonal ou non selon le modèle adopté pour son analyse, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple :

Soit un plan expérimental entre quatre facteurs A , B , C et D . A a 3 niveaux ; B , 3 niveaux ; C , 3 niveaux et D , 2 niveaux. Ce plan est représenté par son "tableau développé" (tableau 2.1.2) dans lequel chaque ligne représente un essai où A , B , C et D prennent les niveaux indiqués dans leurs colonnes respectives.

A	B	C	D
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	2	0
0	2	1	0
0	2	2	1
1	0	0	1
1	0	2	0
1	1	1	0
1	1	2	1
1	2	0	0
1	2	1	1
2	0	1	0
2	0	2	1
2	1	0	0
2	1	1	1
2	2	0	1
2	2	2	0

Table 2.2: Tableau développé du plan expérimental.

Nous envisagerons deux cas :

- Premier cas : Les actions considérées dans le modèle sont m , A , B , C , D , AD , BD et CD , toutes les autres actions étant négligeables.

- Deuxième cas : Les actions non négligeables sont : m, A, B, C, D, AB, AC et BC .

Nous obtenons les résultats représentés sur le tableau 2.3.

	Premier cas	deuxième cas
Actions considérées	m, A, B, C, D, AD, BD et CD	m, A, B, C, D, AB, AC et BC
Etude de l'orthogonalité des actions deux à deux	$m \perp$ toutes les actions $A \perp B, A \perp C, A \perp D$ $B \perp C, B \perp D, C \perp D$ $AD \perp B, AD \perp C,$ $BD \perp A, BD \perp C,$ $CD \perp A, CD \perp B$	$m \perp$ toutes les actions $A \perp B, A \perp C,$ $A \perp D, B \perp C, B \perp D,$ $C \perp D, AB \nparallel C, AB \perp D,$ $AC \nparallel B, AC \perp D,$ $BC \nparallel A, BC \perp D,$
Conclusion	Le plan est orthogonal	Le plan n'est pas orthogonal

Table 2.3: Tableau d'étude de l'orthogonalité.

2.1.3 Matrice orthogonale

Une matrice est orthogonale si ses vecteurs colonnes sont orthogonaux deux à deux.

L'orthogonalité de deux vecteurs X_1 et X_2 tels que :

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \cdots \\ x_{1i} \\ \cdots \\ x_{1k} \end{pmatrix} \text{ et } X_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \cdots \\ x_{2i} \\ \cdots \\ x_{2k} \end{pmatrix}.$$

se traduit par l'égalité :

$$\sum_{i=1}^k x_{1i}x_{2i} = 0.$$

Fisher et Yates ont reconnu l'orthogonalité comme une propriété importante des matrices X . Elle permet des calculs plus aisés et l'indépendance des estimations.

2.2 Critère "Matrice d'Hadamard"

L'analyste français Jacques Hadamard a démontré que pour atteindre en N expériences la variance minimale de Cauchy-Schwartz, la matrice X associée au plan doit vérifier la relation :

$$X^t X = NI$$

où X^t est la matrice transposée de X , I , la matrice unité.

Les matrices d'Hadamard sont des matrices orthogonales et ont pour éléments 1 ou -1. Hadamard a démontré qu'elles n'existent que pour $N = 2$ et N multiple de 4.

2.2.1 Construction de la matrice d'Hadamard

Comme cité précédemment, les matrices d'Hadamard sont des matrices orthogonales et ont pour éléments 1 ou -1 , elles n'existent que pour $N = 2$ ou N multiple de 4.

La matrice d'Hadamard pour $N = 2$ s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et pour $N = 4$, elle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si N est multiple de 4, les matrices d'Hadamard se construisent à partir des $N - 1$ derniers termes de la première ligne. Ces premières lignes sont données par :

$$N = 8 \quad + \quad + \quad + \quad - \quad + \quad - \quad -$$

$$N = 12 \quad + \quad + \quad - \quad + \quad + \quad + \quad - \quad - \quad - \quad + \quad -$$

$$N = 16 \quad + \quad + \quad + \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad + \quad - \quad - \quad + \quad - \quad - \quad -$$

$$N = 20 \quad + \quad + \quad - \quad - \quad + \quad + \quad + \quad + \quad - \quad + \quad - \quad - \quad - \quad - \quad + \quad + \quad -$$

$$N = 24 \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad - \quad + \quad + \quad - \quad - \quad + \quad + \quad - \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

Ainsi, la matrice complète se construit de la manière suivante :

1. La première ligne : les $N - 1$ signes.
2. De la deuxième ligne et jusqu'à la $(N - 1)^{\text{ième}}$ ligne : Prendre le dernier signe de la ligne précédente et compléter par les $N - 2$ signes restants.
3. La dernière ligne : des signes $-$.

On obtient ainsi un tableau de dimension $N \times (N - 1)$, on lui rajoute une première colonne de signes $+$ pour avoir une matrice d'Hadamard.

2.3 Critère de la diagonale de $(X^t X)^{-1}$

Le plan optimal sera le plan pour lequel la valeur la plus grande sur la diagonale de $(X^t X)^{-1}$ sera la plus faible possible. Ce critère est adopté au cas où les autres critères ne peuvent être considérés. Il permet surtout des calculs plus aisés.

D'autres critères classiques d'optimalité correspondent à une fonction scalaire de la matrice d'information de Fisher F , choisie convexe ou concave selon que l'on souhaite la maximiser ou la minimiser. Une classe assez générale de critères d'optimalité est donnée par la famille :

$$\begin{cases} \phi_k(F) = (\frac{1}{n_p} \text{trace}(Q F^{-1} Q^t)^k)^{\frac{1}{k}} & \text{Si } \det(F) \neq 0, \\ \phi_k(F) = \infty & \text{Si } \det(F) = 0. \end{cases}$$

où n_p est le nombre de facteurs et Q est une matrice de pondération.

On note que sous les hypothèses suivantes :

- l'ensemble des y^s tels que $p_y(y^s|x) > 0$ est indépendant de x .
- $\frac{\partial}{\partial x_i} p_y(y^s|x)$ est absolument intégrable.
- $\mathbb{E}_{y^s|x} \{ [\frac{\partial}{\partial x} \ln p_y(y^s|x)] [\frac{\partial}{\partial x} \ln p_y(y^s|x)]^t \}$ existe et est inversible.

la covariance C de tout estimateur absolument non biaisé vérifie l'inégalité de Cramer-Rao :

$$C \geq F^{-1}(x)$$

où la matrice d'information de Fisher est donnée par :

$$F(x) = \mathbb{E}_{y^s|x} \{ [\frac{\partial}{\partial x} \ln p_y(y^s|x)] [\frac{\partial}{\partial x} \ln p_y(y^s|x)]^t \} = -\mathbb{E}_{y^s|x} \{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial x^t} \ln p_y(y^s|x) \}$$

où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n_p} \end{pmatrix}$ est le vecteur des facteurs.

2.4 L –optimalité

Le cas $k = 1$ correspond au critère de L –optimalité.

2.5 A –optimalité

Le critère de A –optimalité correspond au cas $k = 1$ et à une pondération par une matrice identité. Le plan optimal est donc, celui pour lequel la trace de la matrice F^{-1} sera minimale.

Ce critère est aussi nommé critère de la trace minimale.

2.6 c –optimalité

La c –optimalité correspond au cas où Q est un vecteur ligne.

2.7 D –optimalité et D_s –optimalité

Le critère le plus utilisé correspond au cas $k = 0$ et $Q = I$, et conduit à minimiser $\det(F^{-1})$, ou, ce qui revient au même, à maximiser $\det(F)$. Le plan qui répond à ce critère est dit D –optimal.

Ce critère est aussi appelé critère du déterminant maximal.

Parfois, seul un sous-ensemble des n_p facteurs présente un intérêt, c’est le cas par exemple, où l’on considère quelques facteurs de bruit. On peut parler donc, du critère de D_s –optimalité. Le vecteur x sera donc, décomposé en $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, avec x_1 les paramètres d’intérêt ($\dim x_1 = s$). La matrice d’information de Fisher peut être donc, décomposée en 4 sous-matrices :

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}$$

Si son déterminant est non nul, F^{-1} se partitionne en :

$$\begin{pmatrix} (F_{11} - F_{12}F_{22}^{-1}F_{21})^{-1} & -(F_{11} - F_{12}F_{22}^{-1}F_{21})^{-1}F_{12}F_{22}^{-1} \\ -F_{22}^{-1}F_{21}(F_{11} - F_{12}F_{22}^{-1}F_{21})^{-1} & F_{22}^{-1} + F_{22}^{-1}F_{21}(F_{11} - F_{12}F_{22}^{-1}F_{21})^{-1}F_{12}F_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

sous l'hypothèse que F_{22} n'est pas singulière. On se ramène donc à maximiser $\det(F_{11} - F_{12}F_{22}^{-1}F_{21})$.

Notons enfin que pour simplifier les calculs, quelques auteurs utilisent la matrice $(X^t X)$ plutôt que la matrice d'information de Fisher.

2.8 Classement des plans

Notons que si le plan est décrit par une matrice d'Hadamard, alors il satisfait aux autres critères. Nous pouvons maintenant classer les plans d'expériences suivant leur optimalité. On peut remarquer qu'un plan satisfaisant au critère de la matrice d'Hadamard est orthogonal et vérifie les autres critères d'optimalité, c'est donc le meilleur. Mais ce type de plans n'existe que pour $N = 2$ ou N multiple de 4, on peut choisir, parmi les plans orthogonaux, un plan D -optimal ou A -optimal. Soit donc le classement des plans suivant l'ordre d'optimalité décroissante :

1. Plans satisfaisant au critère de la matrice d'Hadamard.
2. Plans orthogonaux D -optimaux, A -optimaux ou c -optimaux.
3. Autres plans orthogonaux.
4. Plans non orthogonaux.

Chapter 3

Les plans non stratifiés - La régression

3.1 Exposé du problème

Considérons un phénomène caractérisé par un scalaire Y (résultat d'essai) soumis à l'action des variables scalaires $x_1, x_2, \dots, x_m$ qui peuvent être observées mais sur lesquelles aucune action n'est possible (variables non contrôlées, par exemple : conditions atmosphériques). On veut prédire la valeur de Y en se basant sur les valeurs observées. Nous faisons à priori l'hypothèse que le scalaire Y est lié aux variables $x_1, x_2, \dots, x_m$ par le modèle linéaire (par rapport aux coefficients) :

$$y = \sum_{i=1}^p \alpha_i f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) + \varepsilon \quad (3.1)$$

Où :

- Les fonctions f_i peuvent être quelconques à condition que pour les valeurs expérimentales de $x_1, x_2, \dots, x_m$, elles prennent une valeur unique et qu'elles ne contiennent pas de coefficients inconnus. En général, on utilise des polynômes de degré croissant avec i . Pour représenter le terme constant, on pose souvent $f_i = 1$. Notons que les valeurs prises par les fonctions f_i sont connues et sont considérées comme certaines (non aléatoires).
- Les p coefficients α_i sont inconnus, et le problème est justement de les estimer.
- ε est une variable aléatoire gaussienne de moyenne 0 et d'écart type inconnu σ . Cette

variable remplit par ailleurs les conditions suivantes :

- σ est indépendant (analytiquement) des valeurs prises par les variables explicatives.
- Pour deux essais différents, on a deux épreuves différentes de la variable ε . Ces épreuves sont considérées comme stochastiquement indépendantes.

L'hypothèse de la normalité de ε est justifiée par le théorème central limite dont les conditions d'application correspondent bien aux cas effectivement rencontrés en pratique.

Notons enfin, que pour assurer l'indépendance stochastique des erreurs relatives aux différents essais et pour éviter l'influence de variables incontrôlées (variables de peu d'influence et qu'on aurait pu oublier), les essais sont effectués dans un ordre au hasard. On dit que les essais sont randomisés. Pour ce faire, on utilise des tables de nombres au hasard.

Si maintenant, pour simplifier l'écriture, nous posons :

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = z_i$$

notre modèle s'écrit :

$$y = \sum_{i=1}^p \alpha_i z_i + \varepsilon \quad (3.2)$$

Supposons qu'on a effectué n essais, on obtient n relations de la forme :

$$y_j = \sum_{i=1}^p \alpha_i z_{ij} + \varepsilon_j$$

Pour $j = 1, n$.

3.2 Estimation des α_i

Pour cela, nous allons utiliser la méthode des moindres carrés. Elle correspond dans notre cas (ε distribué suivant une loi normale) à la méthode du maximum de vraisemblance.

Soit Q l'erreur quadratique à minimiser :

$$Q = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2 = \sum_{j=1}^n \left(y_j - \sum_{i=1}^p \alpha_i z_j^{(i)} \right)^2$$

En dérivant par rapport aux α_i et en faisant les dérivées égales à 0, on obtient p equations de la forme :

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_k} = \sum_{j=1}^n -2z_{kj}(y_j - \sum_{i=1}^p \alpha_i z_{ij}) = 0 \quad \text{Pour : } k = 1, p.$$

$$\sum_{j=1}^n z_{kj} \sum_{i=1}^p \alpha_i z_{ij} = \sum_{j=1}^n z_{kj} y_j \quad \text{Pour : } k = 1, p.$$

Ce système peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n z_{1j}^2 & \sum_{j=1}^n z_{1j}z_{2j} & \cdots & \sum_{j=1}^n z_{1j}z_{pj} \\ \sum_{j=1}^n z_{2j}z_{1j} & \sum_{j=1}^n z_{2j}^2 & \cdots & \sum_{j=1}^n z_{2j}z_{pj} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n z_{pj}z_{1j} & \sum_{j=1}^n z_{pj}z_{2j} & \cdots & \sum_{j=1}^n z_{pj}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n z_{1j}y_j \\ \sum_{j=1}^n z_{2j}y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n z_{pj}y_j \end{pmatrix}$$

ou :

$$M\alpha = m \Rightarrow Z^t Z \alpha = Z^t Y$$

Où :

$$Z^t = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{p1} & z_{p2} \cdots & z_{pn} \end{pmatrix} \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

d'où les estimateurs des α_i :

$$\hat{\alpha} = (Z^t Z)^{-1} Z^t Y$$

Calculons ensuite, l'espérance de $\hat{\alpha}$:

$$\mathbb{E}(\hat{\alpha}) = \mathbb{E}[(Z^t Z)^{-1} Z^t Y] = (Z^t Z)^{-1} Z^t \mathbb{E}(Y) = (Z^t Z)^{-1} Z^t Z \alpha = \alpha$$

Donc $\hat{\alpha}$ est un estimateur sans biais de α .

$$\mathbb{V}(\hat{\alpha}) = \mathbb{V}[(Z^t Z)^{-1} Z^t Y] = [(Z^t Z)^{-1} Z^t] \mathbb{V}(Y) [Z^t Z]^{-1} Z^t$$

$$\mathbb{V}(\hat{\alpha}) = (Z^t Z)^{-1} Z^t \mathbb{V}(Y) Z (Z^t Z)^{-1} = (Z^t Z)^{-1} Z^t \sigma^2 \mathbb{I}_n Z (Z^t Z)^{-1}$$

$$\mathbb{V}(\hat{\alpha}) = \sigma^2 (Z^t Z)^{-1} Z^t Z (Z^t Z)^{-1} = \sigma^2 (Z^t Z)^{-1}$$

3.3 Estimation de σ^2

σ^2 peut être estimée par :

$$S_\varepsilon^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_j - \hat{y}_j)^2 \text{ où : } \hat{y}_j = \sum_{i=1}^p \hat{\alpha}_i z_{ij}$$

On prend l'estimateur sans biais de σ^2 :

$$S^2 = \frac{1}{n-p} \sum_{j=1}^n (y_j - \hat{y}_j)^2$$

qui suit une loi de χ_{n-p}^2 .

3.4 Loi des $\hat{\alpha}_i$

Soit donc, la loi des $\hat{\alpha}_i$:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_i &\rightsquigarrow N(\alpha_i, \sigma^2 (Z^t Z)_{ii}^{-1}) \\ \frac{\hat{\alpha}_i - \alpha_i}{\sqrt{\sigma^2 (Z^t Z)_{ii}^{-1}}} &\rightsquigarrow N(0, 1) \end{aligned}$$

σ^2 étant inconnue, on la remplace par son estimateur sans biais, on obtient ainsi :

$$\frac{\hat{\alpha}_i - \alpha_i}{\sqrt{S^2 (Z^t Z)_{ii}^{-1}}}$$

qui suit une loi de Student $t_{(n-p)}$.

3.5 Tests sur les coefficients du modèle

3.5.1 Test simultané de tous les coefficients de régression

On teste l'hypothèse $H_0 : \alpha = \alpha^0$ contre $H_1 : \alpha \neq \alpha^0$. Comme $\|Z\alpha - Z\hat{\alpha}\|^2$ et $\|Y - Z\hat{\alpha}\|^2$ sont indépendantes, on en déduit que :

$$\frac{\|Z\alpha - Z\hat{\alpha}\|^2}{\|Y - Z\hat{\alpha}\|^2} \cdot \frac{n-p}{p} = F(p, n-p)$$

En remplaçant α par α^0 on peut donc tester l'hypothèse nulle. On rejettera H_0 si la quantité

$$\frac{\|Z\alpha^0 - \hat{Y}\|^2}{\|Y - \hat{Y}\|^2} \cdot \frac{n-p}{p} \text{ est trop grande.}$$

3.5.2 Test du caractère significatif d'un des coefficients de régression

Il s'agit de tester si l'effet d'un facteur est significatif ou non. On teste alors l'hypothèse $H_0 : \alpha_i = 0$ contre l'hypothèse $H_1 : \alpha_i \neq 0$

Ce test est basé sur la statistique :

$$T_{\alpha_i} = \frac{|\hat{\alpha}_i|}{\sqrt{S^2(Z^t Z)^{-1}_{ii}}}$$

Si T_{α_i} est supérieur à la quantité $t_{(n-p, \frac{\alpha}{2})}$ tirée de la table de la loi de Student avec $\alpha = \text{constante}$ est le niveau du test, on rejette H_0 , ce qui veut dire que la variable dépendante z_i fait partie du modèle.

3.5.3 Test de q coefficients de régression

Les deux tests précédents ne sont en fait que des cas particuliers du test plus général suivant qui permet, entre autres choses, de tester la nullité de q coefficients de régression ; il faut prendre garde ici que les estimateurs $\hat{\alpha}_j$ de α_j étant corrélés, il n'est pas légitime de tester successivement $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ au moyen du test de Student précédent.

Ecrire $\alpha_1 = \alpha_{10}, \alpha_2 = \alpha_{20}, \dots, \alpha_q = \alpha_{q0}$ n'est qu'un cas particulier de $H\alpha = \theta$, où H est une matrice de rang q .

Le test de l'hypothèse $H_0 : H\alpha = \theta$ contre $H_1 : H\alpha \neq \theta$ s'effectue alors de la manière suivante : on pose $\hat{Y}$ l'estimateur de Y par la méthode des moindres carrés et $\hat{Y}_0$ l'estimateur des moindres carrés de Y sous la contrainte $H\alpha = \theta$.

On montre alors que si H_0 est vraie alors :

$$\frac{\|Y - \hat{Y}_0\|^2 - \|Y - \hat{Y}\|^2}{\|Y - \hat{Y}\|^2} \cdot \frac{n-p}{q} = F(q, n-p)$$

ce qui permet de tester H_0 .

On constate que si $q = 1$, ou $q = p$, on retrouve les deux tests étudiés précédemment.

Chapter 4

Les plans orthogonaux

Dans ce chapitre, nous allons étudier une catégorie importante des plans expérimentaux, les plans orthogonaux. L'orthogonalité est une propriété importante car elle permet des calculs plus aisés et l'indépendance des estimées des coefficients du modèle.

4.1 Les plans factoriels

Un plan est dit factoriel si chacun des niveaux d'un facteur est associé à chacun des niveaux de l'autre ou des autres facteurs. Les plans factoriels ont l'avantage de conduire, par l'analyse de la variance, à des décompositions et à des interprétations simples, en terme d'effets principaux et d'interactions. Ces plans ont, cependant, l'inconvénient d'introduire rapidement, pour plus de deux facteurs, un nombre considérable d'objets.

4.1.1 Les plans factoriels sans répétition

La construction de ce type de plans est aisée : un plan d'expériences est factoriel sans répétition s'il comprend une fois chacune des combinaisons possibles des niveaux des facteurs.

L'analyse du plan factoriel sans répétition ne nécessite aucune hypothèse sur la négligibilité des interactions sauf celle d'ordre le plus élevé.

4.1.2 Les plans factoriels avec répétition

Ce type de plans est identique au précédent sauf que chacun des essais est répété le même nombre de fois, de sorte que, dans ce cas, le nombre d'essais est :

$$n' = r.n$$

Où r est le nombre de répétitions et n est le nombre d'essais dans le plan sans répétition. Cette fois aucune hypothèse n'est plus nécessaire quand à la négligibilité des interactions, même pour celle d'ordre le plus élevé.

4.1.3 Les plans factoriels complets

Dans un plan factoriel complet toutes les combinaisons d'essais possibles sont représentées. La construction d'un plan de ce type est facile, mais il présente l'inconvénient d'inclure rapidement un très grand nombre d'essais. La table 4.1 donne un exemple d'un plan factoriel complet à deux facteurs à 2 et 3 niveaux respectivement. Le nombre d'essais nécessité

Facteur 1	0	0	0	1	1	1
Facteur 2	0	1	2	0	1	2

Table 4.1: Plan factoriel complet à deux facteurs (2 et 3 niveaux respectivement).

par ce plan est très élevé, pour peu qu'on ait assez grand nombre de facteurs. Si l'on a f facteurs $A_1, A_2, \dots, A_f$ ayant respectivement $p_1, p_2, \dots, p_f$ niveaux, le nombre d'essais correspondant est :

$$n = p_1 p_2 \dots p_f$$

4.1.4 Les plans factoriels fractionnés

Ce sont des plans qui font intervenir un sous-ensemble des objets d'un plan factoriel, choisi de telle sorte qu'il soit possible de mesurer l'effet individuel de chacun des facteurs, ainsi que leurs interactions d'ordre inférieur (interactions des facteurs deux à deux, par exemple). Ce sous-ensemble constitue alors une répétition partielle ou incomplète de l'ensemble des objets.

Le choix d'un plan factoriel fractionné peut s'avérer délicat. Les tables de TAGUCHI sont des plans factoriels fractionnés orthogonaux auxquels sont associés des graphes linéaires et qui permettent une construction avisée de ce type de plans, notamment en prenant en compte la confusion d'actions entre facteurs et interactions (alias). Les tables de TAGUCHI sont repérées par une inscription du type $L_z(X^y)$, où :

- z est le nombre d'expériences dans le plan.
- X le nombre de niveaux retenus pour les facteurs.
- y le nombre de facteurs retenus pour l'étude.

et donc X^y est le nombre d'expériences que comporte le plan factoriel complet correspondant.

Le tableau 4.2 donne la table $L_8(2^7)$, c'est un plan factoriel fractionné de 8 expériences pour 7 facteurs à 2 niveaux chacun. Le plan factoriel complet correspondant comporte 128 essais. La figure 4.1 nous donne les graphes linéaires de cette table.

A	B	C	D	E	F	G
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	2	2	2	2
1	2	2	1	1	2	2
1	2	2	2	2	1	1
2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	2	1	2	1
2	2	1	1	2	2	1
2	2	1	2	1	1	2

Table 4.2: La table $L_8(2^7)$.

Sur les graphes linéaires, les cercles indiquent les facteurs, ceux qui sont plus faciles à modifier sont indiqués par des cercles noirs, les traits indiquent les interactions entre deux facteurs. On remarque alors, que plusieurs utilisations sont possibles.

Pour construire un plan fractionné à partir d'une table de Taguchi, on suit les étapes suivantes :

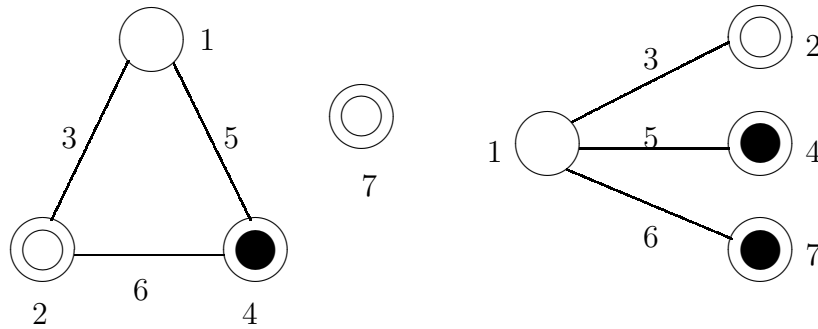
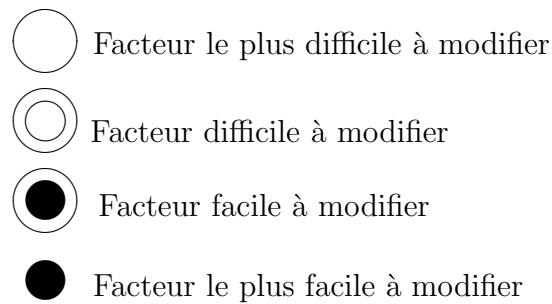
Figure 4.1: Graphes linéaires pour la table $L_8(2^7)$ 

Figure 4.2: Signification des cercles dans les graphes linéaires

- Choisir une table de Taguchi.
 - Déterminer les actions (facteurs ou interactions) susceptibles d'être influentes.
 - Choisir un graphe linéaire correspondant.
 - Associer les colonnes de la table de Taguchi aux facteurs et interactions comme indiqué sur le graphe linéaire. Les facteurs les plus difficiles à modifier seront placés sur les premières colonnes, car leurs niveaux changeront ainsi avec une fréquence inférieure.
- On obtient ainsi, un plan factoriel fractionné orthogonal. Le plus important est que cette méthode nous permet d'éviter les phénomènes d'alias.

4.2 Les plans multifactoriels

Ces plans ont été introduits en 1946 par PLACKET et BURMAN. Il existe une table qui permet de construire aisément les plans multifactoriels connus jusqu'à un nombre d'essais $n = 200$.

Nous donnons ici un exemple pour $n = 2$.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1

Table 4.3: Construction d'un plan multifactoriel à partir de la table.

La première colonne de ce plan (exceptée du premier élément) est donnée par la table. Pour obtenir les autres colonnes, on procède par permutations circulaires jusqu'à obtenir un carré. On ajoute alors une ligne de 0. On obtient ainsi, le tableau développé du plan multifactoriel à 12 essais et 11 facteurs à 2 niveaux. En fait, pour que l'analyse soit possible, il faut en garder au maximum 10. On supprime au hasard les facteurs en excédent. Les plans multifactoriels sont définis par deux paramètres qui les déterminent complètement :

- p qui est le nombre de niveaux commun à tous les facteurs.
- m qui est un coefficient qui ressort de l'étude combinatoire de ces plans.

Le nombre d'essais d'un plan multifactoriel $PM(p, m)$ est :

$$n = mp^3 - (m - 1)p^2$$

Le nombre maximal de facteurs qu'on peut y introduire du point de vue combinatoire est :

$$f = \frac{n-1}{p-1} = mp^2 + p + 1$$

Quand ce nombre de facteurs est introduit, on dit que le plan est *Complètement orthogonalisé* et son analyse est alors impossible. Pour que l'analyse soit possible, on ne peut introduire que f_p facteurs ($f_p < f$).

Les plans multifactoriels sont connus en grand nombre pour $p = 2$. Pour p premier ou puissance d'un nombre premier, on sait les construire dans certains cas particuliers (cas des plans gréco-latins). Si p ne répond pas à ces conditions, en dehors de certains plans gréco-latins, on ne sait pas les construire.

4.2.1 Les plans gréco-latins

C'est un cas particulier des plans multifactoriels où :

$$m = \frac{p^{k-2} - 1}{p - 1}$$

k est dit nombre de paramètres ou de dimensions du plan. Ce qui donne :

$$n = p^k \text{ et } f = \frac{p^k - 1}{p - 1}$$

On dit qu'il s'agit d'un plan gréco-latin d'arête p à k paramètres ou k dimensions.

L'origine des carrés gréco-latins ($k = 2$) est assez ancienne puisque EULER les étudiait déjà sous le nom de carrés magiques. A ce moment, on avait coutume de représenter les dispositions combinatoires en question sous forme de carrés. On se limitait à quatre facteurs et on représentait leurs niveaux par :

- L'abscisse dans le carré.
- L'ordonnée dans le carré.
- Des lettres latines.
- Des lettres grecques.

La construction des plans gréco-latins est connue quand p est premier ou puissance d'un nombre premier. Dans ce cas, ils sont toujours complètement orthogonalisables.

a α	b β	c γ
c β	a γ	b α
b γ	c α	a β

Table 4.4: Plan gréco-latin

Lorsque p n'est ni premier, ni puissance d'un nombre premier, de nombreuses études ont été effectuées, notamment dans le cas des carrés gréco-latins. Pour résumer ces recherches, disons que, sauf pour $p = 6$, il est toujours possible de trouver un carré gréco-latin (avec 4 facteurs au moins).

4.2.2 Les carrés latins

C'est un cas particulier des plans gréco-latins. Un carré latin est un carré tel que chaque élément figure une et une seule fois dans chacune de ses lignes et chacune de ses colonnes.

En particulier, on appelle carré latin de base, un carré latin dans lequel les objets sont rangés par ordre numérique (ou alphabétique) dans la première ligne et dans la première colonne. L'étude de ces dispositifs, sous l'angle de l'analyse combinatoire permet de montrer qu'il n'existe qu'un seul carré latin de base de type 3×3 , 4 carrés latins de base distincts de type 4×4 , 56 carrés latins de base distincts de type 5×5 , ... etc. Des tables relativement complètes en sont données notamment par FISHER et YATES (1963) et par PEARSON et HARTELEY (1966).

Pour construire un carré latin, on choisit un carré latin de base puis, on permute aléatoirement ses lignes et ses colonnes. On utilise pour cela, une table de nombres aléatoires.

4.2.3 Utilisation des plans multifactoriels, gréco-latins et latins

Ces plans sont très intéressants étant donné le faible nombre d'essais requis pour l'étude d'un nombre relativement grand de facteurs. Ils présentent cependant deux inconvénients :

- Tous les facteurs doivent avoir le même nombre de niveaux.
- Toutes les interactions doivent être négligeables. Seuls, les effets des différents facteurs peuvent être étudiés. Ce qui est grave, c'est que, si une interaction, supposée négligeable, ne l'est pas, cela modifie l'effet d'un ou plusieurs facteurs avec lesquels elle est confondue.

On dit que deux actions sont confondues quand les niveaux de l'une sont toujours associés aux mêmes niveaux de l'autre. Autrement dit, on fait varier deux choses en même temps ; il est alors impossible de séparer ces deux choses sauf si on sait que l'une est sans effet.

C'est bien ce qui se passe dans un plan multifactoriel. Voyons-le sur l'exemple ci-contre, qui représente le tableau développé d'un carré latin de 3 de côté.

A	B	C
0	0	0
0	1	1
1	0	1
2	1	0
2	2	1
0	2	2
2	0	2
1	2	0
1	1	0

L'interaction AB est confondue avec C . En effet :

Niveaux de C	Niveaux de AB associés à celui de C
0	00, 12, 21
1	01, 22, 10
2	02, 11, 20

On verrait de même que AC est confondue avec B et que BC l'est avec CA .

La réduction sensible du nombre d'essais avec les plans multifactoriels, gréco-latins ou latins se paye par un risque important. En dépit de ce risque, ces plans sont fréquemment utilisés en pratique.

4.3 Les plans rectangulaires

Ces plans de création récente sont peu connus et d'utilisation limitée. Leur nom provient du fait qu'ils peuvent être représentés, dans les cas simples, dans un rectangle. ces plans

sont tirés de plans gréco-latins à k dimensions ($k > 2$) et tels que p soit premier ou puissance d'un nombre premier, dans lesquels on supprime certains facteurs pour les remplacer par des facteurs à p^s niveaux ($s < k$). Leur construction est difficile et leur utilisation présente les mêmes risques que ceux encourus lors de l'utilisation des plans gréco-latins.

4.4 Les plans mixtes

4.4.1 Les plans mixtes simples

Dans le même souci d'études des interactions, ont été imaginés des plans dénommés "plans mixtes simples" parce qu'ils sont une combinaison factorielle d'essais de plans orthogonaux.

Pour qu'un plan mixte simple soit analysable, il suffit qu'un seul de ses composants soit incomplet.

Le plan factoriel est un plan mixte où les composants sont des facteurs uniques. Un facteur unique peut donc être considéré comme un plan orthogonal complètement orthogonalisé.

4.4.2 Les plans mixtes complexes

Pour obtenir un plan mixte simple à deux composants, on répète pour chaque essai du premier composant tous les essais du deuxième composant.

Pour obtenir un plan mixte complexe à deux composants, pour chaque essai du premier composant, on répète un plan du type du deuxième composant, mais les niveaux des facteurs du deuxième composant sont permutés à chaque répétition du deuxième plan.

Le plan mixte complexe jouit des mêmes propriétés que le plan mixte simple, mais il présente l'intérêt au moins théorique de varier les combinaisons des niveaux des facteurs. Le domaine d'expérimentation est exploré d'une manière plus variée.

4.4.3 Les plans mixtes à composants liés

Suivant un raisonnement analogue à celui fait pour passer des plans gréco-latins aux plans rectangulaires, nous pouvons constituer un plan mixte, simple ou complexe, à com-

posants liés.

La liaison ne peut s'effectuer qu'entre des facteurs de composants différents.

Plusieurs opérations de liaisons sont possibles, mais un facteur donné ne peut entrer que dans une liaison.

Un plan où aucune liaison n'est plus possible est dit "plan mixte à composants complètement liés". Comme pour les plans gréco-latins, dans un plan mixte à composants complètement liés, toutes les interactions d'ordre supérieur à 1 doivent être négligeables.

Un plan mixte à composants liés est toujours incomplet, même si ses composants sont complètement orthogonalisés.

4.5 L'analyse des plans orthogonaux

L'analyse des résultats passe par deux étapes : d'abord, une analyse graphique est effectuée pour déterminer les facteurs et interactions dont l'action est négligeable. Cela permet l'élimination des facteurs et interactions superflus et la correction du modèle. L'analyse de la variance permet ensuite de tester si l'action supposée d'un facteur est effective ou si ce n'est que le résultat de la variabilité naturelle du phénomène.

4.5.1 Analyse graphique

L'objectif de cette analyse est de représenter graphiquement les résultats de l'étude, moyennes et dispersions des réponses :

- plus la pente de la droite qui relie les deux valeurs moyennes, cas d'un facteur à deux niveaux, est forte devant l'étendue des résultats aux extrémités, plus le facteur ou l'interaction étudié a un effet influent sur la réponse.
- le sens de variation de la droite indique si le facteur agit de manière positive ou négative sur la réponse.

Remarque : On considère le facteur ou l'interaction linéaire... la réponse est proportionnelle aux niveaux du facteur ou de l'interaction... il est parfois important, notamment dans

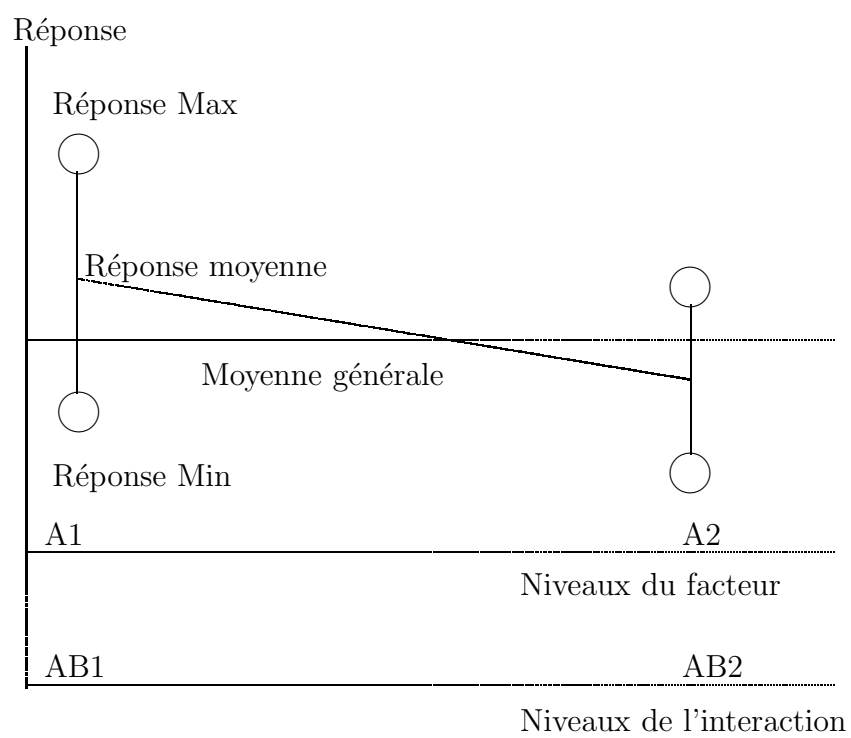


Figure 4.3: Analyse graphique.

le cas d'une connaissance limitée du phénomène, de vérifier cette linéarité considérée à priori... soit en prenant 3 niveaux ou plus pour le facteur mais cela complique la campagne d'essais et l'efficacité est limitée...soit en effectuant une étude de linéarité de la réponse aux variations des niveaux.

4.5.2 Analyse de la variance

L'objectif de cette analyse est de vérifier si les effets retenus comme influents sont réellement associés au facteur ou à l'interaction considéré ou s'ils ne sont que les manifestations de la variabilité naturelle du phénomène étudié.

Cette analyse permet donc la validation statistique des effets retenus.

Problématique :

Supposons un plan pour lequel la réponse ne dépend aucunement des facteurs. Le calcul des effets donnerait néanmoins des résultats numériques.

L'analyse de la variance permet de déterminer à partir de quel seuil un effet peut être considéré comme statistiquement significatif.

Démarche :

L'analyse de la variance est basée sur la comparaison entre la variance résiduelle du phénomène étudié et la variance des effets des facteurs et interactions retenus comme influents.

Le test de Fisher-Snedecor permet cette comparaison pour un seuil de refus à un risque donné (risque qu'un effet soit considéré comme significatif alors qu'il ne l'est pas).

4.5.3 ANOVA à deux facteurs

Etant donné un plan factoriel complet à deux facteurs A et B , à s et t niveaux respectivement. L'expérience correspondant au niveau i du facteur A et au niveau j du facteur B est répétée n_{ij} fois, nous obtenons ainsi $s.t.n$ observations, où $n = \sum_{i,j} n_{ij}$. On peut donc écrire :

$$Y_{ijl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \theta_{ij} + \varepsilon_{ijl} \quad \text{Pour : } i = 1, s, j = 1, t, l = 1, n_{ij}. \quad (4.1)$$

où :

- μ est une valeur moyenne autour de laquelle tourne la valeur de la réponse.
- α_i est l'effet dû au facteur A au niveau i .
- β_j est l'effet dû au facteur B au niveau j .
- θ_{ij} l'effet dû à l'interaction entre le facteur A au niveau i et le facteur B au niveau j . ε_{ijl} est l'erreur de la $l^{\text{ième}}$ expérience au niveau i du facteur A et au niveau j du facteur B .
- Y_{ijl} est la valeur de la réponse pour la $l^{\text{ième}}$ expérience au niveau i du facteur A et au niveau j du facteur B . Y_{ijl} est donc une variable aléatoire gaussienne de moyenne $\mu + \alpha_i + \beta_j + \theta_{ij}$ et d'écart type σ inconnu.

Nous aurons besoin, par la suite, des notations suivantes :

$$n_{io} = \sum_{j=1}^t n_{ij}, n_{oj} = \sum_{i=1}^s n_{ij}, n = \sum_{i,j} n_{ij} = \sum_i n_{io} = \sum_j n_{oj}$$

$$Y_{i..} = \frac{1}{n_{io}} \sum_{j,l} Y_{ijl}, Y_{.j.} = \frac{1}{n_{oj}} \sum_{i,l} Y_{ijl}, Y_{...} = \frac{1}{n} \sum_{i,j,l} Y_{ijl}$$

$$Y_{ij.} = \frac{1}{n_{ij}} \sum_l Y_{ijl}$$

Estimation des coefficients

Pour estimer les coefficients du modèle, on utilise le critère des moindres carrés qui consiste à minimiser l'erreur quadratique :

$$\Delta_{ijl} = \sum_{ijl} (Y_{ijl} - \mu - \alpha_i - \beta_j - \theta_{ij})^2$$

Soit donc, la dérivée par rapport à μ :

$$\frac{\partial \Delta_{ijl}}{\partial \mu} = -2 \sum_{ijl} (Y_{ijl} - \mu - \alpha_i - \beta_j - \theta_{ij}) = 0$$

Après calculs, on obtient :

$$\hat{\mu} = Y_{...}$$

Estimons maintenant, les α_i :

$$\frac{\partial \Delta_{ijl}}{\partial \alpha_i} = -2 \sum_{jl} (Y_{ijl} - \mu - \alpha_i - \beta_j - \theta_{ij}) = 0$$

Ce qui donne :

$$\hat{\alpha}_i = \frac{1}{n_{io}} \left(\sum_{jl} Y_{ijl} - n_{io} \mu \right) = Y_{i..} - Y_{...}$$

De la même façon, on obtient les estimateurs des β_j :

$$\hat{\beta}_j = Y_{.j.} - Y_{...}$$

et les estimateurs des θ_{ij} :

$$\hat{\theta}_{ij} = Y_{ij.} + Y_{...} - Y_{i..} - Y_{.j.}$$

Estimons enfin σ^2 :

$$V_{ij} = \frac{1}{n_{ij} - 1} \sum_l (Y_{ijl} - Y_{ij.})^2$$

L'estimateur de σ^2 est donné par :

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n - st} \sum_{ijl} (Y_{ijl} - Y_{ij.})^2 = \frac{1}{n - st} \sum_{ij} (n_{ij} - 1) V_{ij}$$

Tests sur les paramètres du modèle

Soit l'équation de l'analyse de la variance du modèle 4.1 :

$$\sum_{ijl} (Y_{ijl} - Y_{...})^2 = \sum_{ijl} Y_{ijl}^2 - n Y_{...}^2$$

On obtient l'équation de l'ANOVA à deux facteurs :

$$\sum_{ijl} Y_{ijl}^2 = \sum_{ijl} (Y_{ijl} - Y_{...})^2 + n Y_{...}^2$$

Pour appliquer le théorème de COCHRAN, on développe et on obtient :

$$\sum_{ijl} Y_{ijl}^2 = \sum_{ijl} (Y_{ijl} - Y_{ij.})^2 + \sum_{ijl} (Y_{i..} - Y_{...})^2 + \sum_{ijl} (Y_{.j.} - Y_{...})^2 + \sum_{ijl} (Y_{ij.} - Y_{i..} - Y_{.j.} + Y_{...})^2 + n Y_{...}^2$$

Où :

- $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{ijl} Y_{ijl}^2$ suit une loi de χ_n^2
- $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{ijl} (Y_{ijl} - Y_{ij.})^2$ suit une loi de χ_{n-st}^2

- $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{ijl} (Y_{i..} - Y_{...})^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^s n_{io} (Y_{i..} - Y_{...})^2$ suit une loi de χ_{s-1}^2
- $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{ijl} (Y_{.j.} - Y_{...})^2$ suit une loi de χ_{t-1}^2
- $\frac{n}{\sigma^2} Y_{...}^2$ suit une loi de χ_1^2
- $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{ij} n_{ij} (Y_{ij.} - Y_{i..} - Y_{.j.} + Y_{...})^2$ suit une loi de $\chi_{(t-1)(s-1)}^2$

Test sur l'existence de l'interaction :

On teste l'hypothèse $H_0 : \theta_{ij} = 0, \forall i, j$ contre l'hypothèse $H_1 : \exists i, j, \theta_{ij} \neq 0$. Ce test est basé sur la statistique :

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{ij} n_{ij} (Y_{ij.} - Y_{i..} - Y_{.j.} + Y_{...})^2$$

Or σ^2 est inconnue, on la remplace par son estimateur sans biais. La statistique du test devient ainsi :

$$F = \frac{\frac{1}{(s-1)(t-1)} \sum_{ij} n_{ij} (Y_{ij.} - Y_{i..} - Y_{.j.} + Y_{...})^2}{\frac{1}{n-st} \sum_{ijl} (Y_{ijl} - Y_{ij.})^2} \quad (4.2)$$

qui suit une loi de FISHER $f_{((s-1)(t-1), n-st)}$.

Si $F > f_{((s-1)(t-1), n-st)}$, on rejette H_0 : il existe une interaction entre les deux facteurs.

Test sur l'influence du premier facteur :

On teste l'hypothèse $H_0 : \alpha_i = 0, \forall i$ contre l'hypothèse $H_1 : \exists i, \alpha_i \neq 0$.

Ce test est basé sur la statistique :

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^s n_{io} (Y_{i..} - Y_{...})^2$$

Deux cas se présentent :

1. Si l'on accepte " $\theta_{ij} = 0$ " :

La quantité 4.2 n'est pas l'effet d'interaction entre facteurs, elle peut être considérée comme erreur. Elle sera additionnée donc, aux variations résiduelles.

La statistique du test devient après remplacement de σ^2 :

$$F = \frac{\frac{1}{s-1} \sum_{i=1}^s n_{io} (Y_{i..} - Y_{...})^2}{\frac{1}{n-st} \sum_{ijl} (Y_{ijl} - Y_{ij.})^2 + \frac{1}{(s-1)(t-1)} \sum_{ijl} (Y_{ij.} - Y_{...} - Y_{.j.} + Y_{...})^2}$$

qui suit une loi de FISHER $f_{(s-1, (n-st)+(s-1)(t-1))}$.

Si $F > f_{(s-1, (n-st)+(s-1)(t-1))}$, on rejette H_0 : il y a effet du premier facteur.

2. Si l'on rejette " $\theta_{ij} = 0$ " :

Ce test sera basé sur la statistique :

$$F = \frac{\frac{1}{s-1} \sum_{i=1}^s n_{io} (Y_{i..} - Y_{...})^2}{\frac{1}{n-st} \sum_{ijl} (Y_{ijl} - Y_{ij.})^2}$$

qui suit une loi de FISHER $f_{(s-1, n-st)}$.

Si $F > f_{(s-1, n-st)}$, on rejette l'hypothèse H_0 : le premier facteur est influent.

Test sur l'influence du deuxième facteur :

Pour tester l'influence du deuxième facteur, on procède de la même manière, mais en prenant en compte le résultat du premier test. Si l'effet du facteur A n'est pas significatif, la valeur calculée pour $\hat{\alpha}$ est considérée comme variation résiduelle.

4.6 Exemple

01- Formalisation du problème : Il s'agit d'étudier un phénomène P . La réponse Y sera optimisée à son minimum.

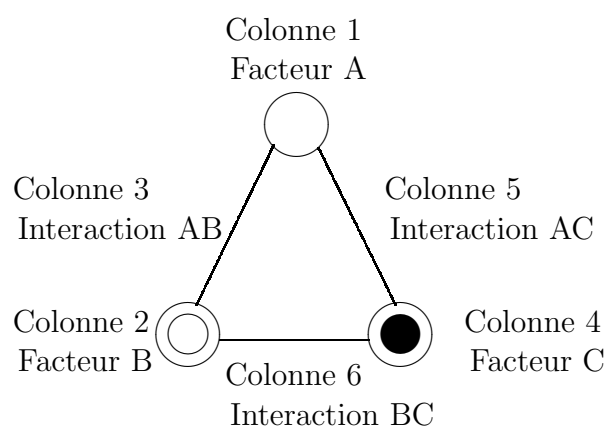
02- Choix des facteurs, niveaux et interactions : Il est retenu 3 facteurs A , B et C à 2 niveaux chacun et 3 interactions AB , AC et BC susceptibles d'être les plus influents sur la réponse Y .

Le facteur A est qualitatif, les facteurs B et C et la réponse sont quantitatifs.

Facteurs	Niveau 1	Niveau 2
A	$A1$	$A2$
B	0.06	0.3
C	13	24

03- Construction du plan : le plan factoriel fractionné doit comporter au moins 7 expériences; la table orthogonale de Taguchi $L_8(2^7)$ répond à cette configuration.

Affectation des facteurs et interactions aux colonnes de la table :



Actions	A	B	AB	C	AC	BC
colonnes	01	02	03	04	05	06
exp.1	A1	B1	AB1	C1	AC1	BC1
exp.2	A1	B1	AB1	C2	AC2	BC2
exp.3	A1	B2	AB2	C1	AC1	BC2
exp.4	A1	B2	AB2	C2	AC2	BC1
exp.5	A2	B1	AB2	C1	AC2	BC1
exp.6	A2	B1	AB2	C2	AC1	BC2
exp.7	A2	B2	AB1	C1	AC2	BC2
exp.8	A2	B2	AB1	C2	AC1	BC1

04- Réaliser les essais :

Actions	A	B	AB	C	AC	BC	Résultat
exp.1	A1	B1	AB1	C1	AC1	BC1	900
exp.2	A1	B1	AB1	C2	AC2	BC2	920
exp.3	A1	B2	AB2	C1	AC1	BC2	2950
exp.4	A1	B2	AB2	C2	AC2	BC1	3250
exp.5	A2	B1	AB2	C1	AC2	BC1	680
exp.6	A2	B1	AB2	C2	AC1	BC2	600
exp.7	A2	B2	AB1	C1	AC2	BC2	1380
exp.8	A2	B2	AB1	C2	AC1	BC1	1950

05- Analyse des résultats :

$$Y = M + A + B + C + AB + AC + BC$$

Moyennes :

$$M = 1578.75.$$

$$M_{A1} = \frac{900+920+2950+3250}{4} = 2005.$$

$$M_{AB1} = \frac{900+920+1380+1950}{4} = 1287.5.$$

Actions	Niveau 1	Niveau 2
A	2005	1152.5
B	775	2382.5
C	1477.5	1680
AB	1287.5	1870
AC	1600	1557.5
BC	1695	1462.5

Effets :

$$E_{A1} = 2005 - 1578.5 = 426.5.$$

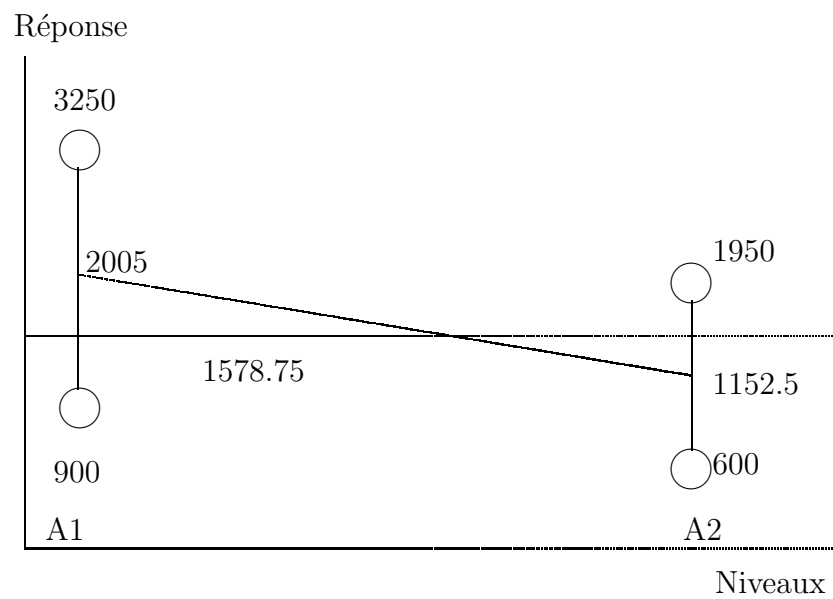
$$E_{AB1} = 1287.5 - 1578.5 = -291.5 \text{ ou } E_{A1B1} = \frac{900+920}{2} - 1578.5 - 426.5 + 803.75 = -291.5.$$

Actions	Niveau 1	Niveau 2
A	426.5	-426.5
B	-803.75	803.75
C	-101.25	101.25
AB	-291.25	291.25
AC	21.25	-21.25
BC	116.25	-116.25

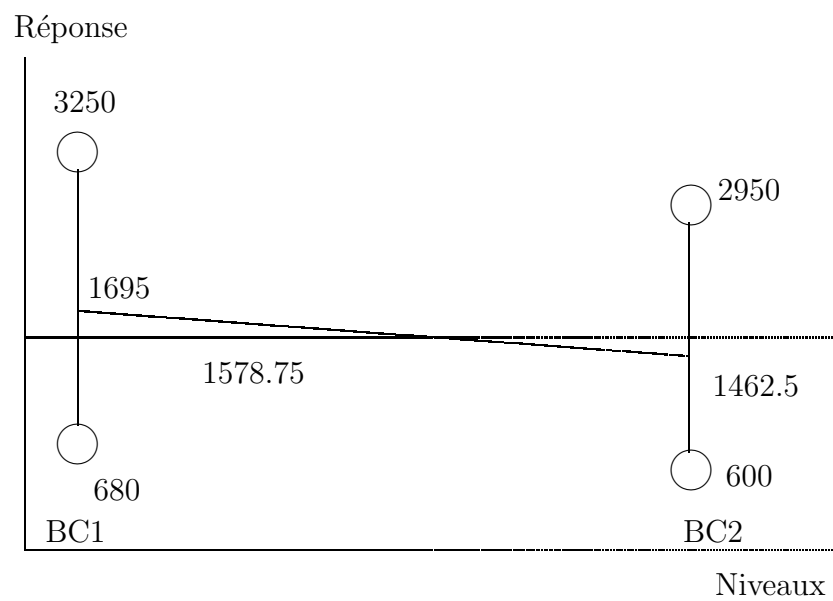
Modèle matriciel :

Y	M	1578.5
facteur A	$(E_{A1}, E_{A2})=[A]$	$(426.5, -426.5)$
facteur B	$(E_{B1}, E_{B2})=[B]$	$(-803.75, 803.75)$
facteur C	$(E_{C1}, E_{C2})=[C]$	$(-101.25, 101.25)$
interaction AB	$\begin{pmatrix} E_{A1B1} & E_{A1B2} \\ E_{A2B1} & E_{A2B2} \end{pmatrix} = [A].[B]^t$	$\begin{pmatrix} -291.25 & 291.25 \\ 291.25 & -291.25 \end{pmatrix}$
interaction AC	$\begin{pmatrix} E_{A1C1} & E_{A1C2} \\ E_{A2C1} & E_{A2C2} \end{pmatrix} = [A].[C]^t$	$\begin{pmatrix} 21.25 & -21.25 \\ -21.25 & 21.25 \end{pmatrix}$
interaction BC	$\begin{pmatrix} E_{B1C1} & E_{B1C2} \\ E_{B2C1} & E_{B2C2} \end{pmatrix} = [B].[C]^t$	$\begin{pmatrix} 116.25 & -116.25 \\ -116.25 & 116.25 \end{pmatrix}$

Analyse graphique : facteur A



interaction BC



L'analyse graphique donne, comme influents sur la réponse Y , les facteurs A et B et l'interaction AB .

Modèle après analyse graphique :

Y	M	1578.5
facteur A	$[A]$	(426.5, -426.5)
facteur B	$[B]$	(-803.75, 803.75)
interaction AB	$[A].[B]^t$	$\begin{pmatrix} -291.25 & 291.25 \\ 291.25 & -291.25 \end{pmatrix}$

Analyse de la variance :

Actions	Somme des carrés	Degrés de liberté	Variances	F_{exp}	$F_{\text{théorique}}$	Signification
A	1453512.5	1	1453512.5	84.94	161.4	Non
B	5168112.5	1	5168112.5	302	161.4	Oui
C	82012.5	1	82012.5	4.79	161.4	Non
AB	678612.5	1x1	678612.5	39.65	161.4	Non
AC	3612.5	1x1	3612.5	0.21	161.4	Non
BC	108112.5	1x1	108112.5	6.31	161.4	Non
Résidus	17112.5	1	17112.5			
Total	7511087.5	7				

L'analyse de la variance, au risque de 5%, donne uniquement le facteur B comme statistiquement significatif.

06- Optimiser la réponse :

Y	M	1578.5
facteur B	$[B]$	(-803.75, 803.75)

$$\min Y = 1578.5 - 803.75 = 774.75$$

En conclusion, seul le facteur B est influent et statistiquement significatif à un risque de 5%.

On retiendra, dans la recherche d'une réponse Y minimum, son niveau 1 soit la valeur 0.06.

Chapter 5

L'approche Bayésienne

5.1 Introduction

L'information à priori issue d'expériences antérieures, ou d'observations, peut être précieuse pour décider comment allouer les traitements efficacement, et mener à des expériences plus instructives. D'ailleurs, la prise en compte des connaissances à priori est inévitable, car une structure de modèle constitue déjà une connaissance à priori.

L'approche Bayésienne de la planification d'expériences fournit un chemin méthodique pour incorporer une telle information dans le processus de planification.

5.2 Plans Bayésiens Optimaux

Les aspects statistiques d'une expérience e peuvent être formellement décrits par un espace d'échantillonnage Ω (résultats possibles pour la réponse Y), l'espace des paramètres Θ , et un modèle de probabilité $p_e(y|\theta)$ qui représente la distribution des variables aléatoires observables Y indexées par un paramètre θ , un élément de l'espace des paramètres Θ . Les tailles des échantillons, les niveaux des traitements, le nombre des traitements, les niveaux des variables explicatives, ou autres aspects du plan à sélectionner sont contenus implicitement dans $p_e(Y|\theta)$. L'objectif fondamental ou la décision finale d'une expérience peut inclure l'estimation de θ ou d'autres quantités fonctions de θ , prédire des observations futures, choisir parmi des modèles concurrents, ou tester d'autres hypothèses.

Lindley (1972) a présenté une approche qui implique la spécification d'une fonction d'utili-

lité exprimant le but et les coûts de l'expérience; le meilleur plan est sélectionné pour maximiser l'utilité moyenne. Une expérience e est d'abord sélectionnée de l'ensemble E des expériences possibles (le premier problème de la décision), après, les résultats Y seront observés. En se basant sur les données observées Y et l'expérience e , une décision terminale d est sélectionnée d'un ensemble D de décisions possibles. Une fonction d'utilité de la forme $U(d, \theta, e, Y)$ exprime les coûts et les conséquences d'utiliser l'expérience e et la décision d avec les données Y et le paramètre θ .

tandis que le processus d'expérimentation évolue dans l'ordre logique du temps, nous pouvons raisonner dans l'ordre inverse pour élaborer les critères d'optimalité.

La solution Bayésienne est de trouver le meilleur plan et la meilleure règle de décision qui maximisent l'utilité moyenne.

L'étape terminale du problème de décision est de trouver la meilleure règle d de décision sachant les données observées Y sous l'expérience e qui maximise l'utilité moyenne à posteriori :

$$\max_d \int_{\Theta} U(d, \theta, e, Y) p(\theta|Y, e) d\theta = U(e, Y) \quad (5.1)$$

Ici, l'espérance ou la moyenne autour de θ explique l'incertitude concernant l'inconnu θ . L'espérance est prise par rapport à la distribution postérieure de θ , qui reflète correctement l'incertitude en θ à l'étape terminale après que Y ait été observé sous l'expérience e .

Comme l'expérience doit être choisie avant d'observer les données Y , la deuxième étape du problème d'optimisation consiste à trouver la meilleure expérience e qui maximise l'utilité pré-postérieure moyenne. L'utilité pré-postérieure moyenne est obtenue par intégration du résultat en 5.1 sur Ω ,

$$U(e) = \int_{\Omega} U(e, Y) p(Y|e) dY = \int_{\Theta} \int_{\Omega} U(e, Y) p_e(Y|\theta) p(\theta) d\theta dY \quad (5.2)$$

Cette intégrale est en fonction de $p(Y|e)$, la distribution marginale de Y sachant e , qui est obtenue en intégrant $p_e(Y|\theta)$ sur les valeurs possibles de θ à priori, décrites par la distribution à priori $p(\theta)$. La solution bayésienne au problème de planification expérimentale sera

donc donnée par l'expérience e^* qui maximise $U(e)$:

$$U(e^*) = \max_e \int_{\Omega} \max_d \int_{\Theta} U(d, \theta, e, Y) p(\theta|y, e) p(y|e) d\theta dY \quad (5.3)$$

La formulation générale peut être utilisée pour trouver les plans optimaux pour une seule expérience, et peut être étendue pour la sélection d'une séquence d'expériences et une prise de décision séquentielle.

5.3 Le choix des fonctions d'utilité

Comme noté précédemment, la fonction d'utilité exprime le(s) but(s) de l'expérience ainsi que les coûts d'utiliser une expérience e et une décision d . On peut choisir une fonction simple comme par exemple : $u = \text{nombre total de patients traités avec succès}$, mais il est important qu'elle soit adaptée aux buts de l'expérience.

il existe plusieurs méthodes pour la construction des fonctions d'utilité, nous présentons ici les fonctions d'utilité basées sur l'information de Shannon et celles basées sur la perte quadratique.

5.3.1 L'information de Shannon

L'information de Shannon est appropriée pour les problèmes d'estimation de θ ou des fonctions en θ , sans spécification d'hypothèses particulières. La fonction d'utilité moyenne est basée sur le changement moyen dans l'information de Shannon ou d'une manière équivalente, la divergence de Kullback-Leibler entre les distributions à posteriori et à priori. Comme la distribution à priori ne dépend pas du plan, cela simplifie l'information moyenne de Shannon de la distribution postérieure :

$$U(e) = \int_{\Theta} \int_{\Omega} \log\{p(\theta|Y, e)\} p_e(y|\theta) p(\theta) dY d\theta \quad (5.4)$$

Dans des modèles linéaires normaux avec une distribution à priori normale, cela revient au critère de la D -optimalité des plans classiques,

$$U(e) = \log |(X_e^T X_e + R)/\sigma^2| \quad (5.5)$$

Où, X_e est la matrice du plan pour l'expérience e et R/σ^2 est la matrice de précision à priori (L'inverse de la matrice des covariances à priori).

Si la prédiction de futures observations est importante, le gain moyen dans l'information de Shannon pour l'observation Y_{n+1} est :

$$U(e) = \int \log(p(Y_{n+1}|Y, e)p(Y|e))dYdY_{n+1} \quad (5.6)$$

Pour des modèles linéaires normaux avec prédiction en un nouveau point x_{n+1} cela conduit à la fonction :

$$U(e) = \log((x_{n+1}^t(X_e^t X_e + R)^{-1}x_{n+1} + 1)^{-1}/\sigma^2) \quad (5.7)$$

Une version bayésienne de la c -optimalité.

5.3.2 La perte quadratique

L'estimation ponctuelle basée sur la perte quadratique mène à la fonction d'utilité :

$$U(e) = - \int_{\Theta} \int_{\Omega} (\theta - \hat{\theta})^T A (\theta - \hat{\theta}) \quad (5.8)$$

où A est une matrice symétrique définie non-négative. La matrice A peut être utilisée pour peser plusieurs problèmes d'estimation différents où l'intérêt peut être l'estimation des composantes individuelles de θ ou de combinaisons linéaires de θ . Pour des modèles linéaires normaux avec une distribution à priori normale, cela peut s'exprimer par :

$$U(e) = -\sigma^2 \text{tr}\{A(X_e^t X_e + R)^{-1}\} \quad (5.9)$$

Une généralisation bayésienne du critère de A -optimalité.

5.4 La distribution à priori

C'est une étape importante pour la planification bayésienne. La distribution à priori peut être obtenue en se basant sur des expériences antérieures, par simulation ... Clyde et Al (1996) ont utilisé des données d'expériences antérieures pour construire une distribution à priori pour utilisation à la planification de futures expériences.

5.5 Les calculs

La planification bayésienne exige des calculs d'intégrales compliquées combinés à des problèmes d'optimisation difficiles (parfois multicritères), il existe plusieurs méthodes numériques mais il est rarement possible d'obtenir des résultats analytiques, ce qui limite beaucoup l'utilisation des plans bayésiens en pratique.

Bibliography

- [1] Anonyme. Plans d'expériences. Mars 2000.
- [2] A. BENOIST. *Notions sur les plans d'expériences*. Societé des éditions technip, 1974.
- [3] M. A. Clyde. Experimental design : a bayesian perspective. Avril 2001.
- [4] P. DAGNELIE. *Principes d'expérimentation*. GEMBLOUX, 1981.
- [5] J. LELLOUCH and P. LAZAR. *Méthodes statistiques en expérimentation biologique*. Medecine sciences Flammarion, 1974.
- [6] P. Muller. Simulation based optimal design. 1998.
- [7] G. SADO and M.C. SADO. *Les plans d'expériences : de l'expérimetation a l'assurance qualité*. AFNOR, 1991.
- [8] G. SAPORTA. *Théories et méthodes de la statistique*. TECHNIP, 1978.
- [9] M.JP. VERTU. *Plans d'expériences*. www.multimania.com/lfm/, 2000.